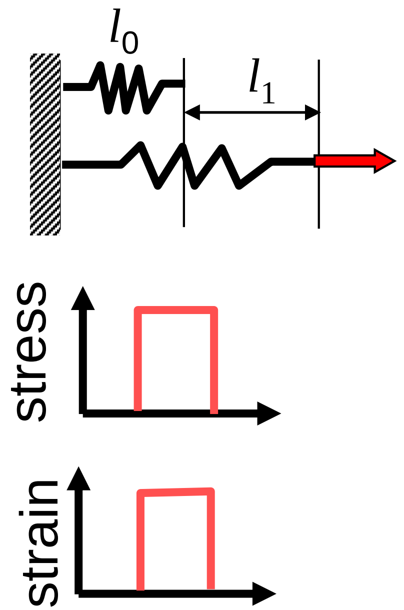
工業反応装置特論

講義時間：6限
場所　　：8-1A
担当　　：山村

VISCO-ELASTIC MODEL

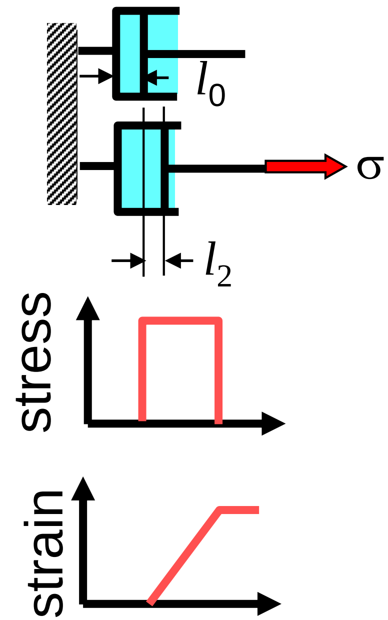
Hookean spring



strain

$$\gamma_1 \equiv \frac{l_1}{l_0}$$

dashpot



$$\gamma_2 \equiv \frac{l_2}{l_0}$$

$$\sigma = G\gamma_1 \qquad (1)$$

stress

弾性率

バネの歪み(strain)

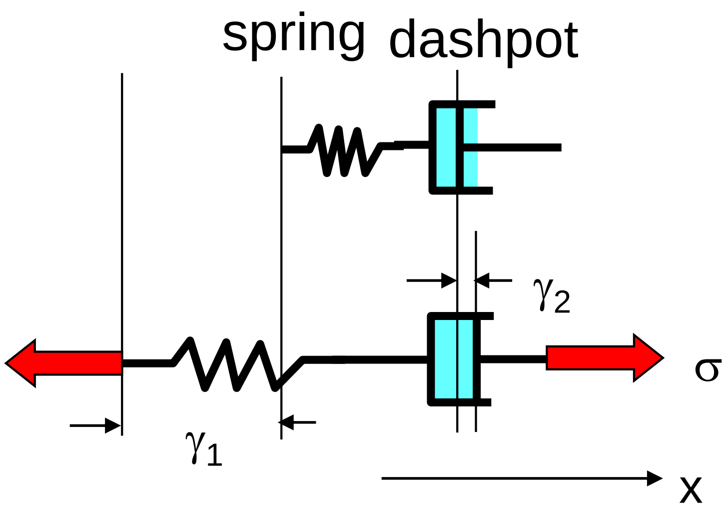
$$\sigma = \mu \frac{d\gamma_2}{dt} \qquad (2)$$

dashpot内
液体粘度

dashpotのひずみ速度

1D MAXELL MODEL (1)

Springとdashpotが直列に連結されたモデル(1D マクセルモデル）を考える



全体の歪みは$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$　(3)

微分すると

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\gamma_2}{dt}$$

(1)(2)を代入すると構成方程式は

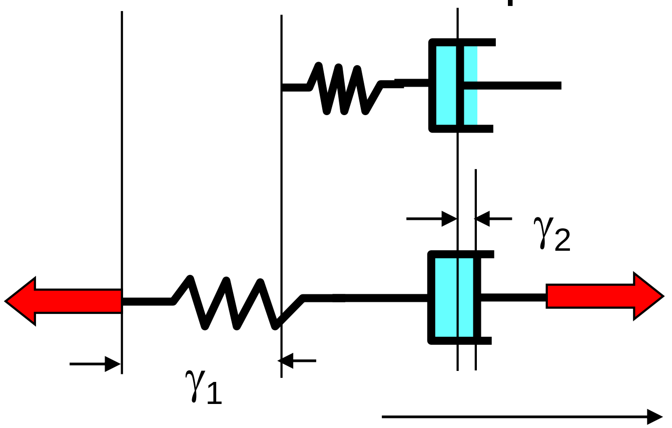
$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (4)$$

整理すると

$$\sigma + \frac{\mu}{G}\frac{d\sigma}{dt} = \mu\frac{d\gamma}{dt} \quad (5)$$

MAXELL MODEL

1D MAXELL MODEL (2)



$t=0$で$\gamma=\gamma_0$(一定）のひずみを作用させた場合を考えると(5)式から

$$\sigma+\frac{\mu}{G}\frac{d\sigma}{dt}=0$$

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\frac{G}{\mu}\sigma$$

$t=0$で$\sigma=\sigma_0$とおけば

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{1}{\sigma}d\sigma=-\frac{G}{\mu}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0}=-\frac{G}{\mu}t$$

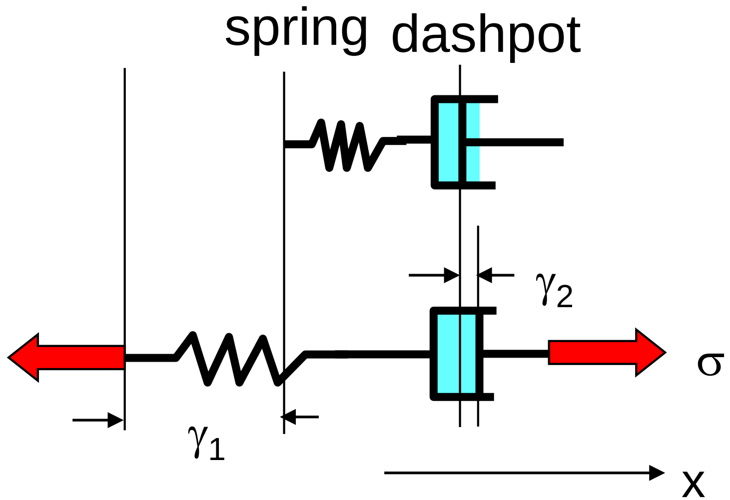
μ/Gが時間の単位を持つことに注意して緩和時間$\lambda\equiv\mu/G$で書き直せば

$$\sigma=\sigma_0\exp(-\frac{t}{\lambda})\quad(6)$$

$t<<\lambda$なら$\sigma\cong\sigma_0$(一定）で弾性体の挙動を示す

$t>>\lambda$なら$\sigma\cong0$で粘性体の挙動を示す

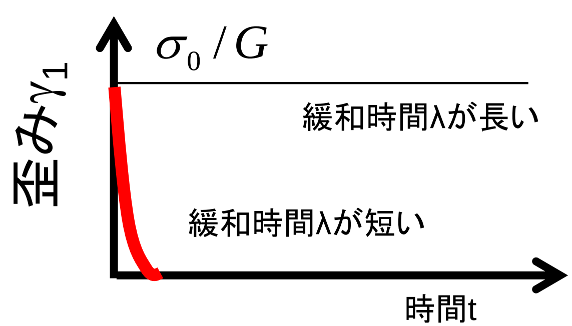
1D MAXELL MODEL (3)



(6)を(1)に代入すれば

$$\sigma_0 \exp(-\frac{t}{\lambda}) = G\gamma_1$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{\sigma_0}{G}\exp(-\frac{t}{\lambda})$$



(6)を(2)に代入すれば

$$\sigma_0 \exp(-\frac{t}{\lambda}) = \mu\frac{d\gamma_2}{dt}$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\sigma_0}{\mu}\exp(-\frac{t}{\lambda})$$

$t=0$で$\gamma_2=\gamma_{20}$として積分すれば

$$\int_{\gamma_{20}}^{\gamma_2} d\gamma_2 = \frac{\sigma_0}{\mu}\int_0^t \exp(-\frac{t}{\lambda})dt$$

$$\therefore \gamma_2 = \gamma_{20} + \frac{\sigma_0}{\mu}(-\lambda)\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda})-1\right\}$$

$$= \gamma_{20} + \frac{\sigma_0}{\mu}\left(-\frac{\mu}{G}\right)\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda})-1\right\} \quad \because \lambda \equiv \frac{\mu}{G}$$

$$= \gamma_{20} + \frac{\sigma_0}{G}\left\{1-\exp(-\frac{t}{\lambda})\right\}$$

チェック

$$\gamma_1+\gamma_2 = \frac{\sigma_0}{G}\exp(-\frac{t}{\lambda}) + \gamma_{20} - \frac{\sigma_0}{G}\left\{\exp(-\frac{t}{\lambda})-1\right\} = \gamma_{20} + \frac{\sigma_0}{G}(\text{一定})$$

理想弾性体―歪み変動を印可した場合―

歪みγを周波数ωで周期変動させた場合

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t \quad (1)$$

$Hookean-spring$からなる理想弾性体なら

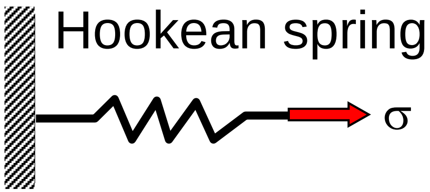
構成方程式は

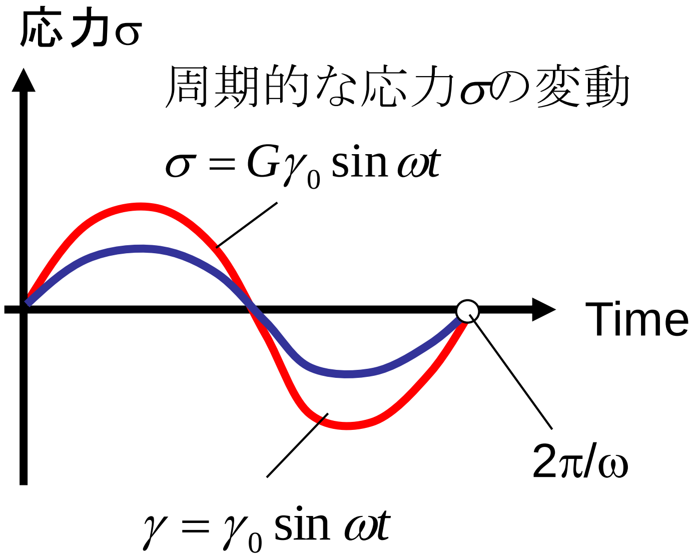
$$\sigma = G\gamma \quad (2)$$

(1)を(2)に代入すると

$$\sigma = G\gamma_0 \sin \omega t \quad (3)$$

応力の振幅は$G\gamma_0$で、位相は変わらない





完全粘性体—歪み変動を印可した場合—

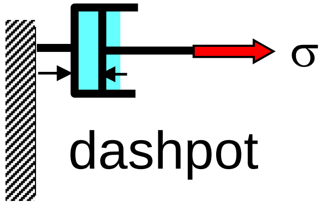
周期的に歪みγを変動させた場合

$$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t \quad (1)$$

粘度μの粘性体（*Newton*流体）なら

構成方程式は

$$\sigma = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad (4)$$



(1)を(4)に代入すると

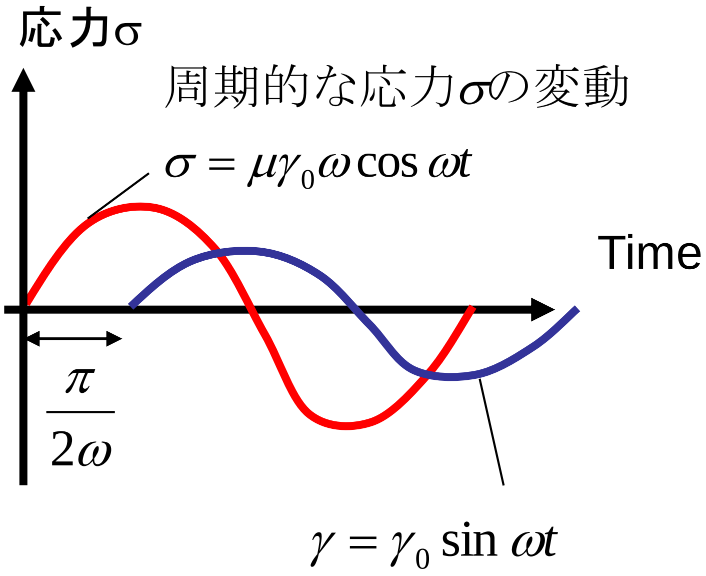
$$\sigma = \mu \gamma_0 \omega \cos \omega t \quad (5)$$

(5)を変形すれば

$$\sigma = \mu \gamma_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (6)$$

$$\because \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \sin \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \omega t$$

(6)より応力の振幅は$\mu \gamma_0 \omega$で、位相は$\dfrac{\pi}{2\omega}$だけ変化



（参考）理想弾性体ー応力変動を印可した場合ー

周期的に応力σを変動させた場合

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t \quad (7)$$

$Hookean - spring$からなる理想弾性体なら

構成方程式は

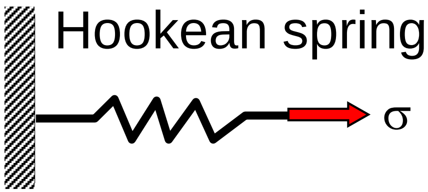
$$\sigma = G\gamma \quad (2)$$

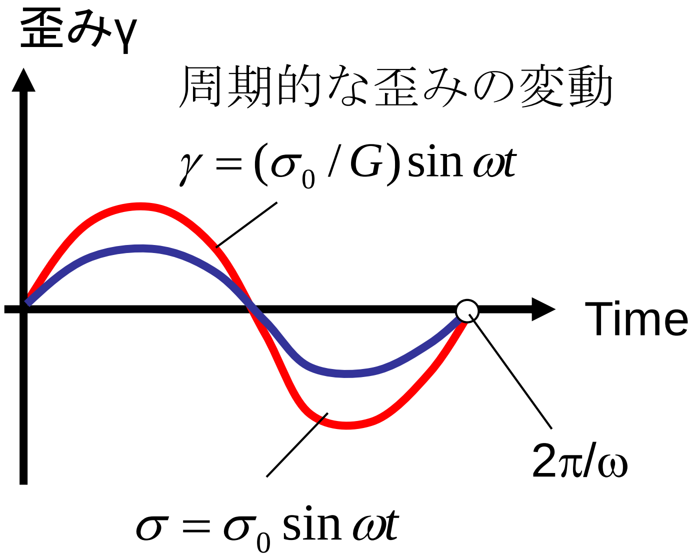
(7)を(2)に代入すると

$$\sigma_0 \sin \omega t = G\gamma$$

$$\therefore \gamma = (\sigma_0 / G)\sin \omega t \quad (8)$$

歪みの振幅はσ_0 / Gで位相は変わらない





粘弾性流体の貯蔵/損失弾性率

完全弾性体と完全粘性体の中間的な性質を示す流体を考える。

位相差を$\delta (0 \le \delta \le \pi / 2)$とおくと周期的な歪み$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$に対する応力の応答は

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (9)$$

展開すれば

$$\sigma = (\sigma_0 \cos \delta) \sin \omega t + (\sigma_0 \sin \delta) \cos \omega t \quad (10)$$

理想弾性体なら第１項のみで（式3)、完全粘性体なら第２項のみで（式5)

それぞれ表されることに注意して

弾性に対応する比例係数$\sigma_0 \cos \delta \equiv$貯蔵弾性率$G'$(ジープライム)$\times$初期歪み$\gamma_0$

粘性に対応する比例係数$\sigma_0 \sin \delta \equiv$損失弾性率$G''$(ジーダブルプライム)$\times$初期歪み$\gamma_0$

とおけば、式(10)から

$$G' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \cos \delta \quad (11)$$

$$G'' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \sin \delta \quad (12)$$

従ってσ_0とγ_0を与えて位相差δを測定すればG'、G''が測定できる

複素弾性率(1)

実数歪み$\gamma = \gamma_0 \sin \omega t$を次のような複素数に拡張する

$$\gamma^* = \gamma_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

オイラーの定理から$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$なので

$$\gamma^* = \gamma_0 \cos \omega t + i \gamma_0 \sin \omega t$$

従ってγ^*の虚数部は$\mathrm{Im}[\gamma^*] = \gamma_0 \sin \omega t$と書け実数歪みに対応する。

同様に、位相差δを持つ複素数の応力を考えると

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (14)$$

これらを用いて複素弾性率G^*を次式で定義する

$$G^* \equiv \sigma^* / \gamma^* \quad (15)$$

(13)(14)より

$$G^* = \frac{\sigma_0 e^{i\omega t} e^{i\delta}}{\gamma_0 e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \cos\delta + i \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \sin\delta \quad (16)$$

複素弾性率(2)

(16)よりG^*の実数部と虚数部を取るとそれぞれ

$$\mathrm{Re}[G^*] = \frac{\sigma_0}{\gamma_0}\cos\delta$$

$$\mathrm{Im}[G^*] = \frac{\sigma_0}{\gamma_0}\sin\delta$$

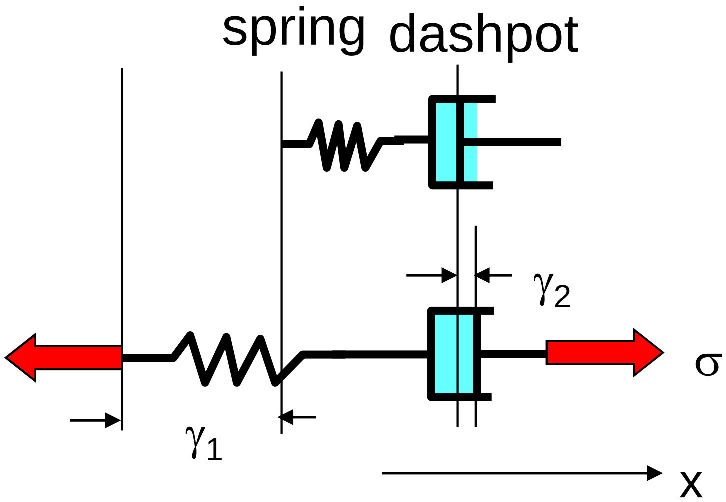
(11)(12)と比較すれば

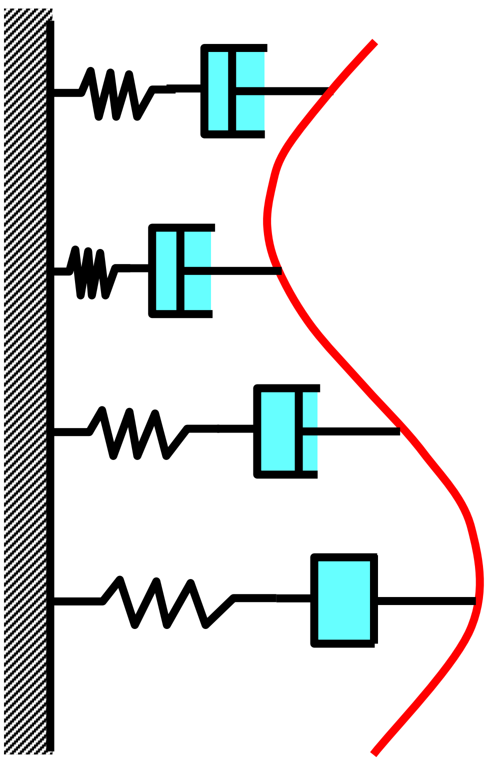
$$G' = \mathrm{Re}[G^*],$$

$$G'' = \mathrm{Im}[G^*]$$

従って複素弾性率を計算しその実数、虚数部をとればG'、G''が得られる。

1D MAXELL MODELの場合 (1)





周期的に応力σを変動させた場合

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} \quad (14)$$

構成方程式としてマクセルモデルを用いると

$$\mu \frac{d\gamma^*}{dt} = \sigma^* + \frac{\mu}{G}\frac{d\sigma^*}{dt} \quad (15)$$

(14)を(15)に代入すると

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{1}{\mu}\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} + \frac{1}{G}(i\omega)\sigma_0 e^{i(\omega t+\delta)} = \frac{\sigma_0}{G}(i\omega + \frac{G}{\mu})e^{i(\omega t+\delta)}$$

1D MAXELL MODELの場合 (2)

積分すると

$$\gamma^* = \frac{\sigma_0}{G}(i\omega + \frac{G}{\mu})\frac{1}{i\omega}e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 + \frac{G}{i\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 + \frac{Gi}{i^2\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

$$= \frac{\sigma_0}{G}(1 - i\frac{G}{\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} + C$$

簡単のためひずみが$\frac{\sigma_0}{G}(1-i\frac{G}{\omega\mu})$のときを$t=0$とおけば

$C=0$なので

$$\gamma^* = \frac{\sigma_0}{G}(1 - i\frac{G}{\omega\mu})e^{i(\omega t+\delta)} = \frac{1}{G}(1 - i\frac{G}{\omega\mu})\sigma^*$$

緩和時間の定義$\lambda \equiv \mu / G$から

$$\gamma^* = \frac{1}{G}(1 - \frac{i}{\omega\lambda})\sigma^* \quad (16)$$

1D MAXELL MODELの場合 (3)

(16)から複素弾性率を$G^* \equiv \sigma^* / \gamma^*$は

$$G^* = \frac{G}{1-\dfrac{i}{\omega\lambda}}$$

$$= \frac{G\left(1+\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{\left(1-\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)\left(1+\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}$$

$$= \frac{G\left(1+\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{1-i^2\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

$$= \frac{G\left(1+\dfrac{i}{\omega\lambda}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

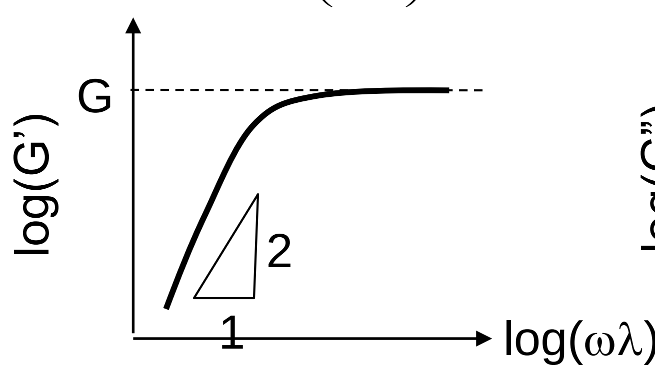
$$\therefore G^* = \frac{G}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} + i\frac{\dfrac{G}{\omega\lambda}}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2}$$

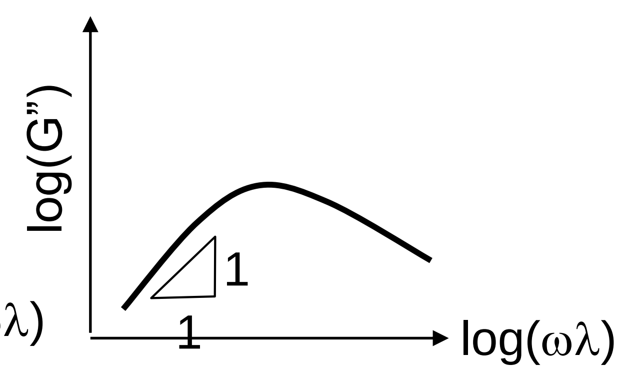
実数部をG'(貯蔵弾性率)

虚数部をG''(損失弾性率)　と定義すれば

$$G' = \frac{G}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} = \frac{G(\omega\lambda)^2}{1+(\omega\lambda)^2}$$

$$G'' = \frac{\dfrac{G}{\omega\lambda}}{1+\left(\dfrac{1}{\omega\lambda}\right)^2} = \frac{G\omega\lambda}{1+(\omega\lambda)^2}$$





Report 6 Maxell model for viscoelastic fluids 氏名

Consider an elastic spring and a dashpot connecting in series.
The spring stretches with the strain γ_1 when the stress σ is applied (Eq. 1).
The same stress acts on the dashpot filled with a fluid of viscosity μ.
The strain in the dashpot, γ_2, is given by Eq. 2.

$$\sigma = G\gamma_1 \quad (1), \quad \sigma = \mu \frac{d\gamma_2}{dt} \quad (2)$$

Q1. Derive the Maxwell equation (Eq. 3) for the total strain $\gamma (= \gamma_1 + \gamma_2)$.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (3)$$

Q2. Suppose sinusoidal stress variation expressed as Eq. 4.

$$\sigma^* = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (4)$$

Eq. 3 is re-written in complex form as

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{1}{G}\frac{d\sigma^*}{dt} + \frac{\sigma^*}{\mu} \quad (5)$$

Substitute Eq.4 into Eq. 5 to derive Eq. 6 where C is a constant and $\lambda (=\mu/G)$ is the relaxation time.

$$\gamma^* = \sigma_0 \left(1 - \frac{i}{\lambda\omega}\right) e^{i\omega t} + C \quad (6)$$

Q3. Derive Eq. (7) for complex modulus, G*, in case of C=0.

$$G^* \equiv \sigma^* / \gamma^* = \frac{G\left(1 + \frac{i}{\lambda\omega}\right)}{1 + \left(\frac{1}{\lambda\omega}\right)^2} \quad (7)$$

Q4. Take real and imaginary parts of Eq. (7) to derive the storage modulus, G' (real part) and the loss modulus, G'' (imaginary part).

$$G' == \frac{G(\omega\lambda)^2}{1 + (\omega\lambda)^2}, \quad G'' = \frac{G\omega\lambda}{1 + (\omega\lambda)^2}$$

Q5 Plot G' and G'' as a function of ω in case of G=200 Pa and λ =3 s.