

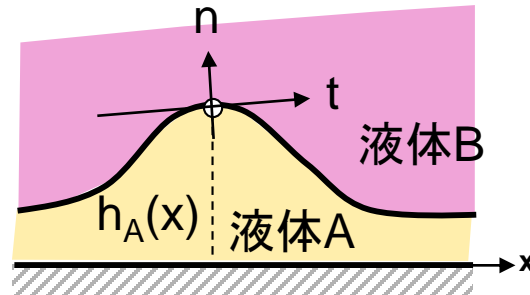
工業反応装置特論

講義時間：火曜/木曜6限

場所：8-1A

担当：山村

湾曲した界面での応力balance(1)



接線方向 $\tau_{t,A} = \tau_{t,B}$ (1)

$\tau_{t,i}$ は界面に沿った方向（接線方向）の流体*i*の応力成分

法線方向 $\tau_{n,A} + p_A = \tau_{n,B} + p_B - \sigma \frac{\partial^2 h_A / \partial x^2}{\{1 + (\partial h_A / \partial x)^2\}^{3/2}}$ (2)

$\tau_{n,i}$ は界面に垂直な方向（法線方向）の流体*i*の応力成分

Q. 両液体が静止している。圧力の高い液体はどちらか？

Which pressure is higher when both liquids remain stationary?

湾曲した界面での応力balance (2)

特別な場合

仮定1: Newton流体A

仮定2: 気体B内の接線方向応力は無視小
(negligible small $\tau_{t,B}$)

$\tau_{t,B} \approx 0$ なので式(1)より

$$\tau_{t,A} = 0$$

流体Aがx方向のみの速度成分 u_A を持つ場合

$$\tau_{t,A} = \tau_{yx,A}$$

Newton流体なら粘度を μ_A とすれば

$$\tau_{yx,A} = -\mu_A \frac{du_A}{dy}$$

従って界面での境界条件は

$$-\mu_A \frac{du_A}{dy} = 0$$

FILM PROFILE EQUATION (FPE)の導出 (1)

静止基板上のNewton流体Aを考える。
気体Bの粘性と重力は無視小、且つ、
表面張力は一定と仮定。

$$\text{定常状態における運動方程式} \mu_A \frac{d^2 u_A}{dy^2} = \frac{dp_A}{dx}$$

2回積分して

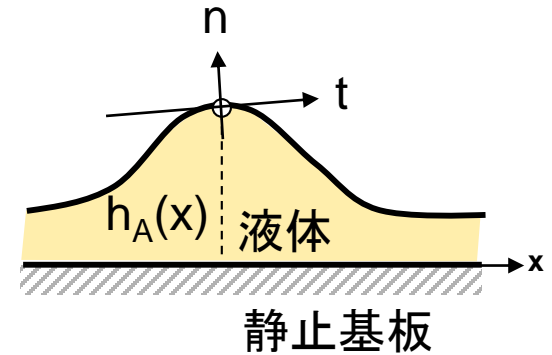
$$u = \frac{1}{2\mu_A} \frac{dp_A}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$

$$\text{境界条件} y=0: u=0, \quad y=h_A(x): \frac{du}{dy} = 0 \text{ から}$$

$$C_2 = 0$$

$$0 = \frac{1}{\mu_A} \frac{dp_A}{dx} h_A + C_1$$

$$\text{速度分布は 2 次曲線} u = \frac{1}{2\mu_A} \frac{dp_A}{dx} y^2 - \frac{1}{\mu_A} \frac{dp_A}{dx} h_A y \quad (3)$$



FILM PROFILE EQUATION の導出 (2)

積分すれば範囲幅当りの流量 q は

$$\begin{aligned} q &\equiv \int_0^{h_A} u(y) dy = \int_0^{h_A} \left\{ \frac{1}{2\mu_A} \frac{dp_A}{dx} y^2 - \frac{h_A}{\mu_A} \frac{dp_A}{dx} y \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_A} \frac{dp_A}{dx} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{h_A} - \frac{h_A}{\mu_A} \frac{dp_A}{dx} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{h_A} \\ &= -\frac{h_A^3}{3\mu_A} \frac{dp_A}{dx} \quad (4) \end{aligned}$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (3)

法線方向の応力釣り合い式 $\tau_{n,A} + p_A = \tau_{n,B} + p_B - \sigma \frac{\partial h_A^2}{\partial x^2}$ において

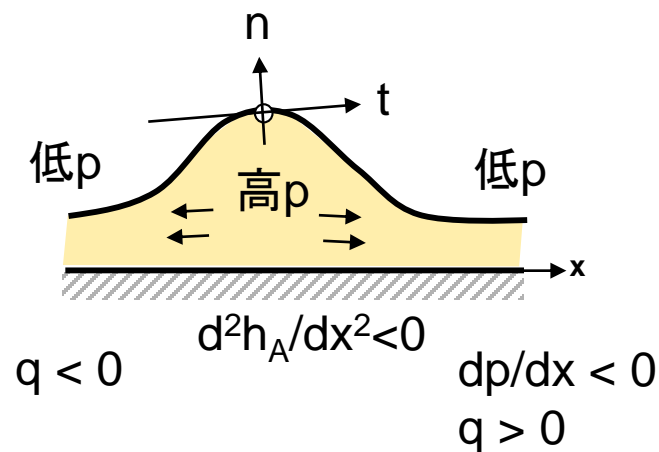
y方向流れが存在しないので $\tau_{n,A} = \tau_{n,B} = 0$

気圧を基準にとる ($p_B = 0$) と

$$p_A = -\sigma \frac{\partial^2 h_A}{\partial x^2} \quad (5)$$

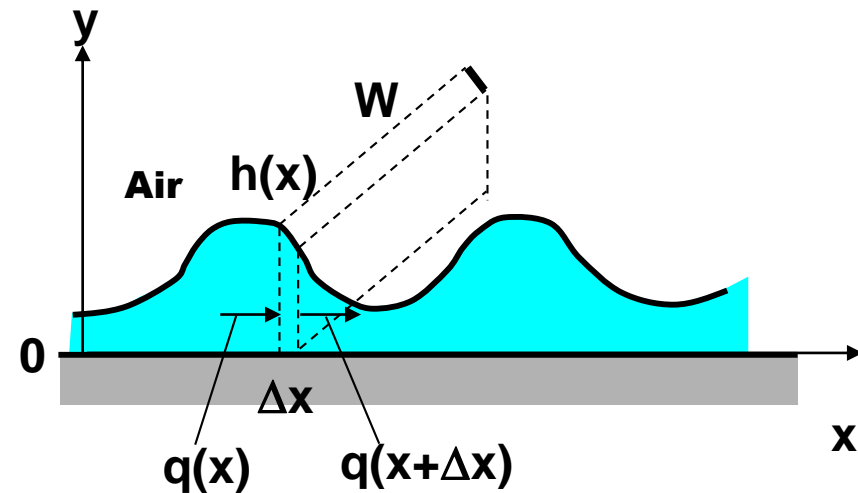
(5)を(4)に代入し添え字Aを略すと

$$q = -\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \quad (6)$$



FILM PROFILE EQUATION (FPE)の導出 (4)

静止平板上に塗布された
周期的な表面凹凸を持つ液体



時刻 t におけるシェル内の体積は $(hW\Delta x)|_t$
 Δt 間の体積変化は $(hW\Delta x)|_{t+\Delta t} - (hW\Delta x)|_t$

q は単位幅あたりの流量なので

Δt 間の x からの流入体積は $(qW)|_x \Delta t$

Δt 間の $x + \Delta x$ からの流出体積は $(qW)|_{x+\Delta x} \Delta t$

従ってシェルバランスから

$$(hW\Delta x)|_{t+\Delta t} - (hW\Delta x)|_t = (qW)|_x \Delta t - (qW)|_{x+\Delta x} \Delta t$$

$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \quad (7)$$

FILM PROFILE EQUATION (FPE)の導出 (5)

(6)を(7)に代入すれば

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (8)$$

(8)を解けば、任意の時刻における液体表面形状が求められる。

FILM PROFILE EQUATION の導出 (6)

無次元化

代表長さを h_0 , 代表速度を U_0 とおくと
代表時間は h_0/U_0 で表される。これらを用いて次の無次元座標と無次元時間を考える。

$$x^* \equiv x/h_0$$

$$h^* \equiv h/h_0$$

$$t^* \equiv t/(h_0/U_0)$$

これらより

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(h^* h_0)}{\partial(t^* h_0/U_0)} = U_0 \frac{\partial h^*}{\partial t^*}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(h^* h_0)}{d(x^* h_0)} = \frac{dh^*}{dx^*}$$

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{d}{d(x^* h_0)} \frac{dh^*}{dx^*} = \frac{1}{h_0} \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}}$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (7)

無次元化

(8)式に代入すれば

$$U_0 \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = - \frac{\partial}{\partial (x^* h_0)} \left\{ - \frac{(h^* h_0)^3}{3\mu} \frac{d}{d(x^* h_0)} \left(- \sigma \frac{1}{h_0} \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) \right\}$$
$$\therefore \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu U_0}{\sigma} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(h^{*3} \frac{d^3 h^*}{dx^{*3}} \right)$$

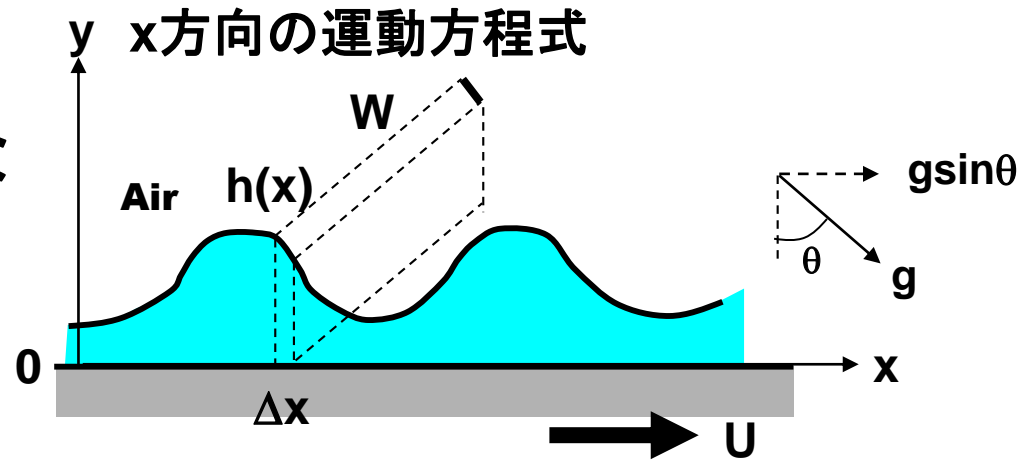
ここで現れる $\frac{\mu U_0}{\sigma}$ はキャピラリ数 (Ca) と呼ばれる無次元数。

圧力の単位で表した粘性力 (せん断応力、運動量) $\mu U_0 / h_0$ と毛管力 σ / h_0 の比となる。

$Ca \sim 1$ ならこれら 2 つの力は等しい

FILM PROFILE EQUATION の導出 (7)

より一般的な
場合



y におけるシエル面積は $W\Delta x$ なので

単位時間に y からシエル内へ流入する x 方向の運動量は $(\tau_{yx} W\Delta x)|_y$

同様に $y + \Delta y$ からシエル外へ流出する x 方向の運動量は $(\tau_{yx} W\Delta x)|_{y+\Delta y}$

x におけるシエル面積は $W\Delta y$ なので

x においてシエルへ作用する圧力は $(W\Delta y p)|_x$

$x + \Delta x$ においてシエルへ作用する圧力は $(W\Delta y p)|_{x+\Delta x}$

シエル体積は $W\Delta x\Delta y$ なのでシエルに作用する x 方向重力成分は $(W\Delta x\Delta y)\rho g \sin \theta$

従って x 方向の運動量収支から

$$0 = (W\Delta y p)|_x - (W\Delta y p)|_{x+\Delta x} + (\tau_{yx} W\Delta x)|_y - (\tau_{yx} W\Delta x)|_{y+\Delta y} + (W\Delta x\Delta y)\rho g \sin \theta$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (8)

シエル体積 $W\Delta x\Delta y$ で除すと

$$0 = -\frac{p|_{x+\Delta x} - p|_x}{\Delta x} - \frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \rho g \sin \theta$$

$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ では

$$0 = -\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g \sin \theta$$

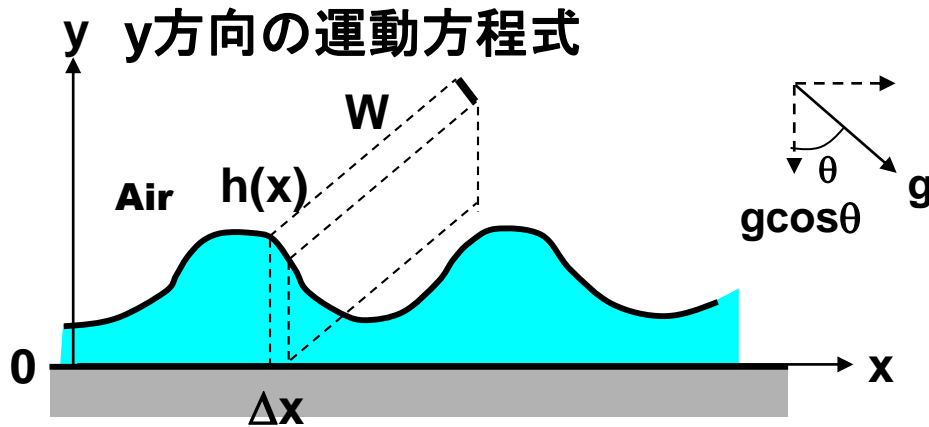
ニュートン流体ならば $\tau_{yx} = -\mu \frac{du}{dy}$ であるから

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) + \rho g \sin \theta$$

ニュートン流体ならば μ は一定なので

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} + \rho g \sin \theta \quad (9)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (9)



y におけるシエル面積は $W\Delta x$ なので

y においてシエルへ作用する圧力は $(W\Delta x p)|_y$

$y + \Delta y$ においてシエルへ作用する圧力は $(W\Delta x p)|_{y+\Delta y}$

シエル体積は $W\Delta x\Delta y$ なのでシエルに作用する y 方向重力成分は $(W\Delta x\Delta y)\rho g \cos \theta$

従って x 方向の運動量収支から

$$0 = (W\Delta x p)|_y - (W\Delta x p)|_{y+\Delta y} - (W\Delta x\Delta y)\rho g \cos \theta$$

シエル体積 $W\Delta x\Delta y$ で除すと

$$0 = -\frac{p|_{y+\Delta y} - p|_y}{\Delta y} - \rho g \cos \theta$$

$\Delta y \rightarrow 0$ では

$$0 = -\frac{dp}{dy} - \rho g \cos \theta \quad (10)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (10)

(10)を $y = 0 \sim h$ まで積分すると $y = 0$ における圧力 p は

$$0 = -(p(h) - p) - \rho g h \cos \theta \quad (11)$$

$y = h$ (気液界面) での応力バランスから

$$p(h) = -\sigma \frac{d^2 h / dx^2}{\{1 + (dh / dx)^2\}^{3/2}}$$

$\frac{dh}{dx} \ll 1$ なら簡単に

$$p(h) = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \quad (12)$$

(12)を(11)に代入すると

$$p = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \quad (13)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (11)

(13)を(9)に代入すれば

$$0 = -\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) + \mu \frac{d^2 u}{dy^2} + \rho g \sin \theta$$

整理すると

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta$$

1回積分して

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] y + C_1$$

もう1回積分して

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] y^2 + C_1 y + C_2$$

境界条件 $y = 0 : u = U$, $y = h(x) : \partial u / \partial y = 0$ から

$$C_1 = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] h, \quad C_2 = U$$

$$\therefore u = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] y^2 - \frac{1}{\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] h y + U \quad (14)$$

FILM PROFILE EQUATION の導出 (12)

(14)を $y = 0$ から $h(x)$ まで積分すると

単位長さ当たりの流量 q は

$$\begin{aligned} q &\equiv \int_0^h u(y) dy \\ &= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h - \frac{h}{\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h + Uh \\ &= \frac{h^3}{6\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] - \frac{h^3}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] + Uh \\ &= -\frac{h^3}{3\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \cos \theta \right) - \rho g \sin \theta \right] + Uh \end{aligned}$$

整理すると

$$\frac{3\mu}{h^3} q = \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \rho g h \cos \theta \right) + \rho g \sin \theta + \frac{3\mu}{h^2} U \quad (15)$$

**与えられた流量 q で h に関するこの微分方程式を解けば
定常状態における表面形状が算出できる**

FILM PROFILE EQUATION の導出 (13)

平均膜厚 h_0 を用いて次のように無次元化

$$x^* \equiv x/h_0$$

$$h^* \equiv h/h_0$$

(15)を書き直すと

$$\frac{3\mu}{(h_0 h^*)^3} q = \frac{d}{h_0 dx^*} \left(\sigma \frac{d^2 h_0 h^*}{h_0^2 dx^{*2}} - \rho g h_0 h^* \cos \theta \right) + \rho g \sin \theta + \frac{3\mu}{(h_0 h^*)^2} U$$

表面張力 σ は定数と仮定して微分の外へ出し整理すると

$$\frac{3}{h^{*3}} = \frac{h_0 \sigma}{\mu q} \frac{d}{dx^*} \left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) - \frac{\rho g h_0^3}{\mu q} \cos \theta \frac{dh^*}{dx^*} + \frac{\rho g h_0^3}{\mu q} \sin \theta + \frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_0}{q}$$

$$\text{ここでCapillary数 } Ca \equiv \frac{\text{粘性力}(\mu q/h_0)/h_0}{\text{表面張力}\sigma/h_0} = \frac{\mu(q/h_0)}{\sigma}$$

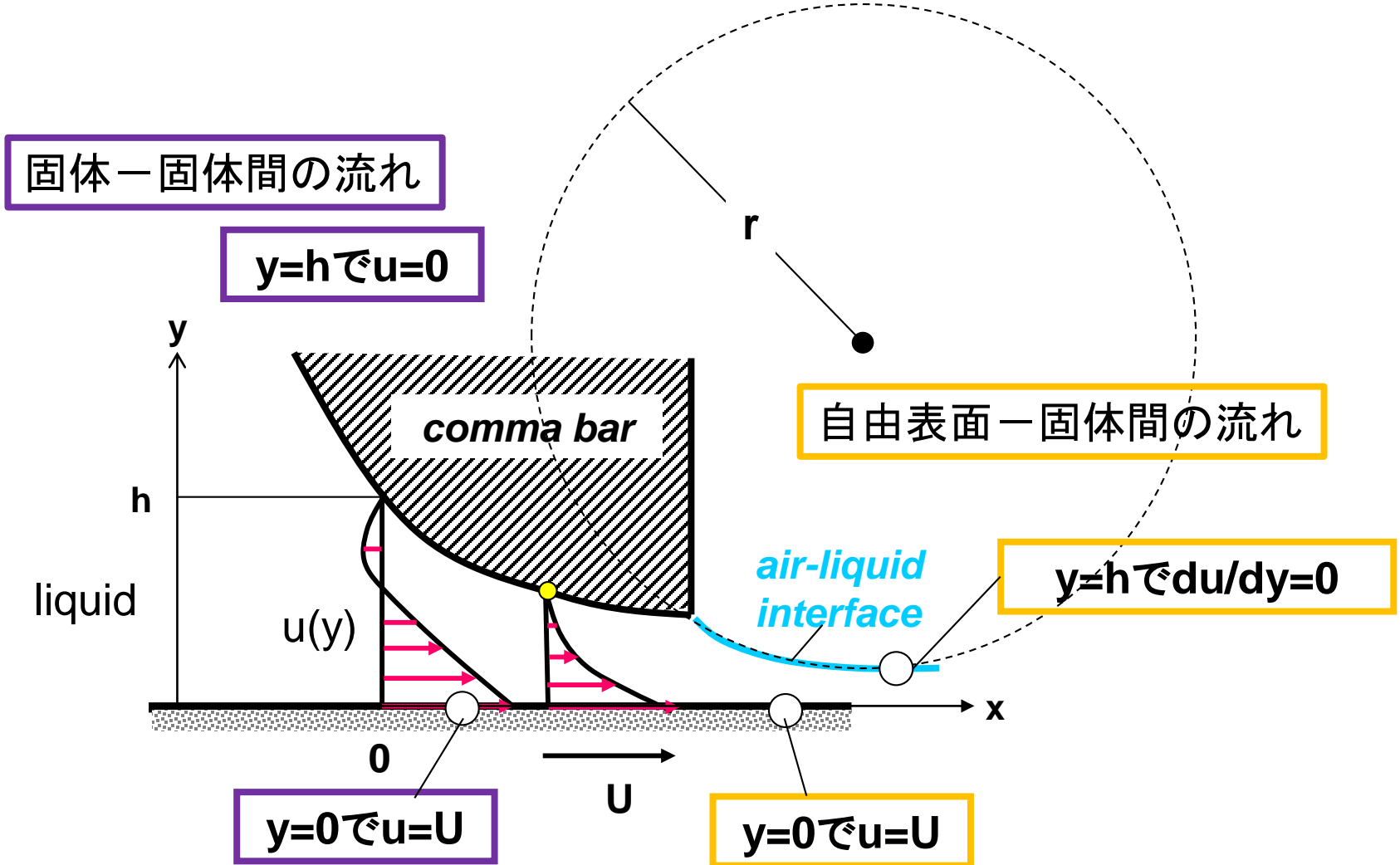
$$\text{Stokes数 } St \equiv \frac{\text{重力}\rho g h_0}{\text{粘性力}(\mu q/h_0)/h_0} = \frac{\rho g h_0^3}{\mu q}$$

と定義されるので

$$\frac{3}{h^{*3}} = \frac{1}{Ca} \frac{d}{dx^*} \left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) - St \cdot \cos \theta \frac{dh^*}{dx^*} + St \cdot \sin \theta + \frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_0}{q}$$

$$\therefore \frac{1}{Ca} \frac{d}{dx^*} \left(\frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \right) = -\frac{3}{h^{*2}} \frac{U h_0}{q} + St \cdot \cos \theta \frac{dh^*}{dx^*} + \frac{3}{h^{*3}} - St \cdot \sin \theta$$

境界条件のまとめ



Report 4 film profile equation of liquid film on stationary substrate 氏名

Consider a thin liquid film of Newtonian fluid coated on a stationary substrate under gravity. Assuming one-dimensional laminar in the x direction, the equation of motion is expressed as

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

Liquid pressure p relative to the atmospheric pressure is given by
The sum of capillary pressure and the pressure due to gravitational force as

$$p = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \rho g h \quad (2)$$

where σ denotes the surface tension as a function of coordinate x .

Q1. Derive Eq. (3) by integrating Eq. (1) under the boundary conditions $y=0: u=0, \quad y=h(x): \mu \partial u / \partial y = \partial \sigma / \partial x$

$$u = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \rho g h \right) \right] y^2 - \frac{1}{\mu} \left[\frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \rho g h \right) \right] h y + \frac{1}{\mu} \frac{d\sigma}{dx} y \quad (3)$$

Q2. Derive the expression (4) for the flow rate per unit length, q , by integrating Eq. (3)

$$q \equiv \int_0^h u(y) dy = -\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(-\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} - \rho g h \right) + \frac{h^2}{2\mu} \frac{d\sigma}{dx} \quad (4)$$

Q3. Derive the film profile equation (6) by combining Eqs. (4) and (5) in case of $\partial \sigma / \partial x = 0$

$$\partial h / \partial t = -\partial q / \partial x \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{3\mu} \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \rho g h \right) \right] \quad (6)$$

