

工業反応装置特論

講義時間:火曜/木曜6限

場所 :8-1A

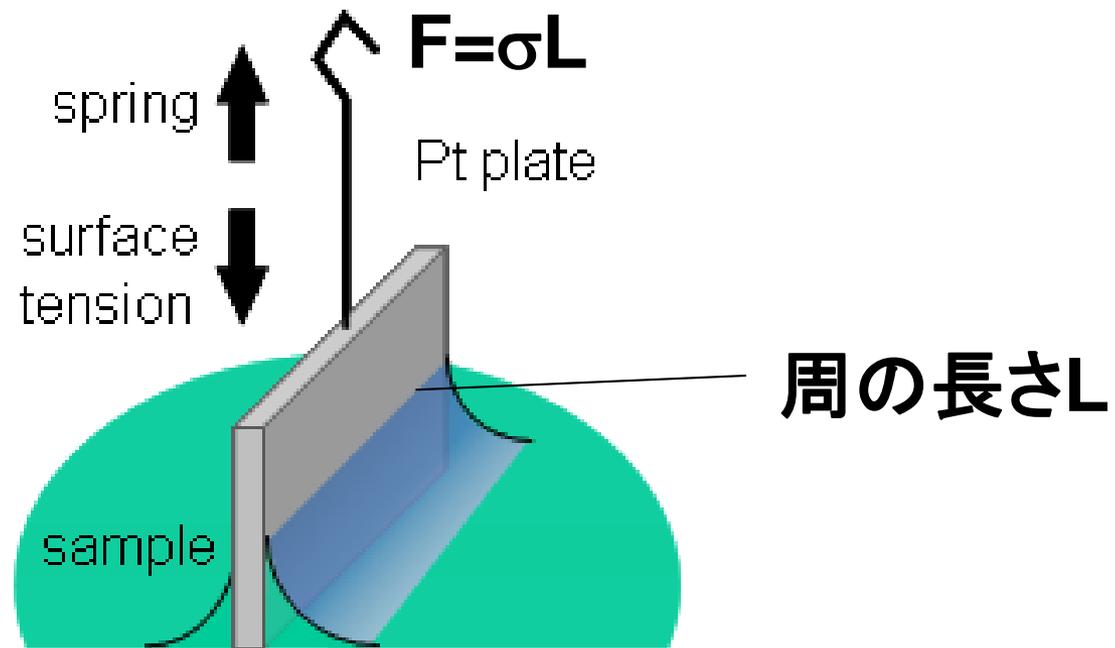
担当 :山村

静的表面張力(σ)

純水(25°C) $\sigma=72 \text{ mN/m} = 72 \text{ mJ/m}^2$ (理科年表より)

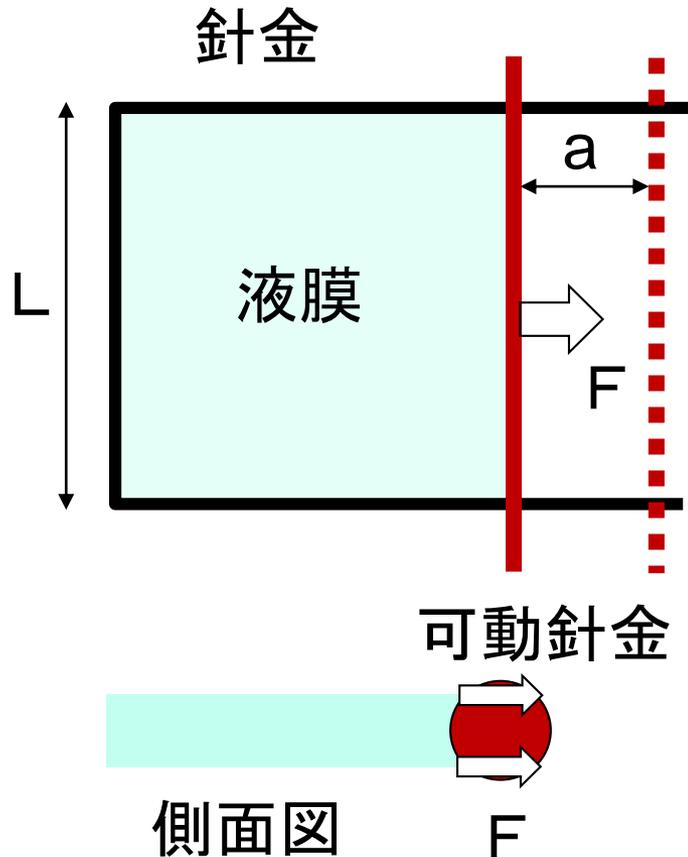
単位長さあたりに作用する力

単位面積当たりのエネルギー(表面エネルギー)



Wilhelmy method

エネルギーとしての表面張力



液膜の上下面がそれぞれ可動針金に接している。表面張力 σ を単位面積当たりのエネルギーと考えると

針金を距離 a だけ動かすのに必要な仕事は

$$W = \sigma \times 2aL \quad [J/m^2][m^2] = [J]$$

仕事は力と距離の積なので

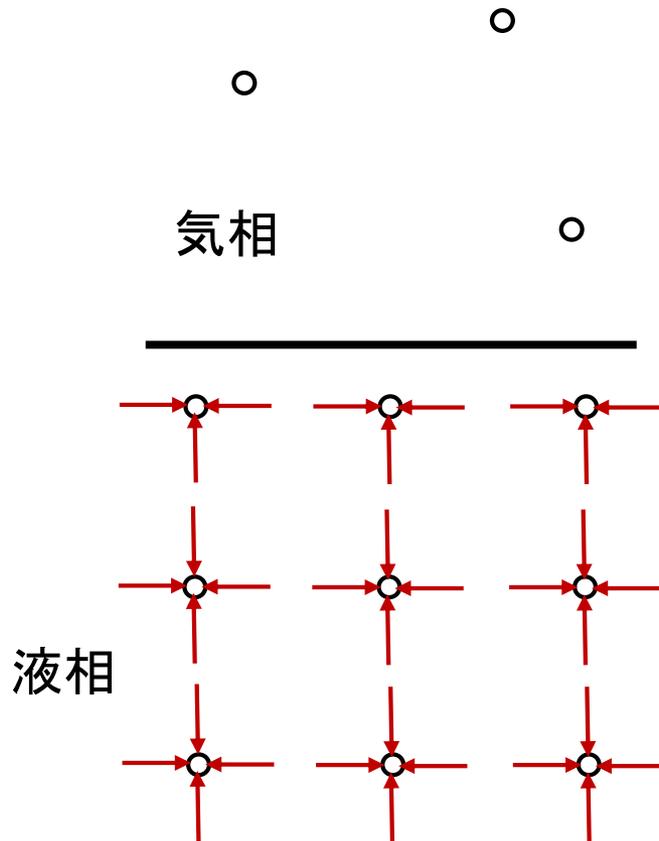
可動針金に作用する力を F とすると

$$W = Fa$$

$$\therefore F = 2 \times \sigma L \quad [N]$$

従って σ は単位長さ当たりに作用する力に相当

表面張力とは

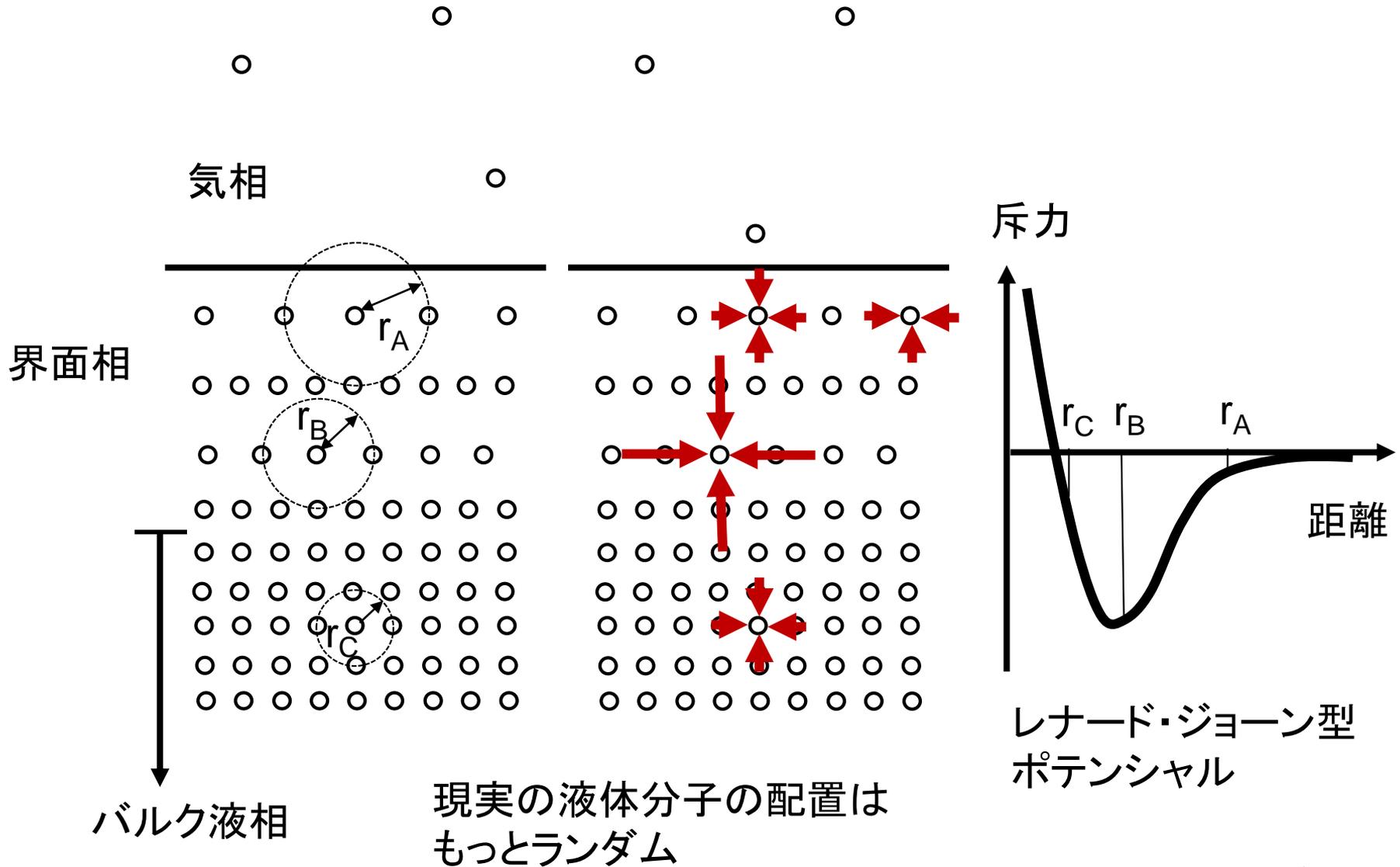


表面にいる分子は、引力相互作用の半分を失っているため「不幸な」状態にある。

(ドウジャンヌら、表面張力の物理学 奥村剛訳、吉岡書店(2003)より抜粋)

教科書にある表面張力の模式図

表面張力の起源: 密度分布



任意の自由表面形状における毛管圧

x 方向のみに液体厚み $h(x)$ が変化する場合を考える。

毛管圧力は気液界面の曲率 $1/r$ を用いて次式で定義する。

$$\Delta p \equiv -\sigma / r \quad (1)$$

自由表面の曲率 r は幾何学から

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2h/dx^2}{\{1 + (dh/dx)^2\}^{3/2}} \quad (2)$$

(1)(2)を組み合わせると

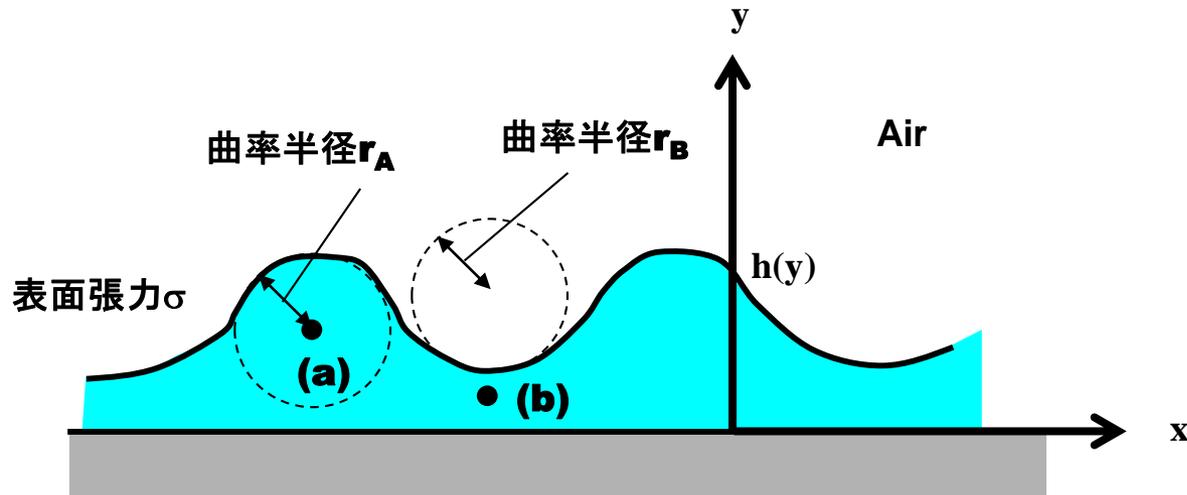
$$\Delta p = -\sigma \frac{d^2h/dx^2}{\{1 + (dh/dx)^2\}^{3/2}}$$

x 方向の液体の広がりに対して膜厚の変化が十分

小さな場合は $\frac{dh}{dx} \ll 1$ が成り立つので、分母第2項は無視小で

$$\Delta p = -\sigma \frac{d^2h}{dx^2}$$

2次元凹凸を持つ液体膜



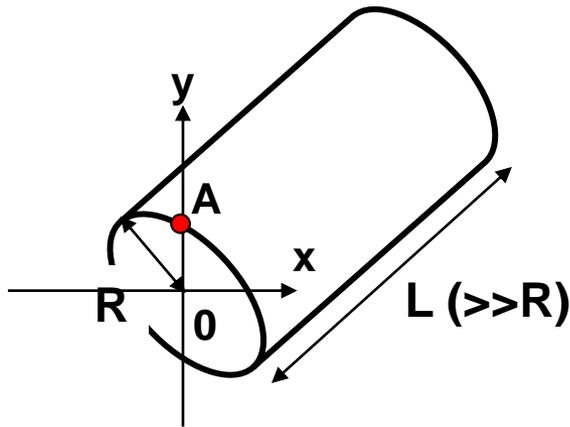
$$\text{点Aでは } d^2h/dx^2 < 0 \quad \therefore \Delta p_A = -\left(-\frac{\sigma}{R_A}\right) = \frac{\sigma}{R_A} (> 0)$$

$$\text{点Bでは } d^2h/dx^2 > 0 \quad \therefore \Delta p_B = -\left(\frac{\sigma}{R_B}\right) = -\frac{\sigma}{R_B} (< 0)$$

圧力差による流れによって、液体表面の凹凸は自発的に減衰
(levelingと呼ばれる現象)

円柱に働く毛管圧

表面が円柱形状の場合



円柱表面の座標は次式で表される。

$$h(= y) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

微分すると

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{x}{(R^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$$

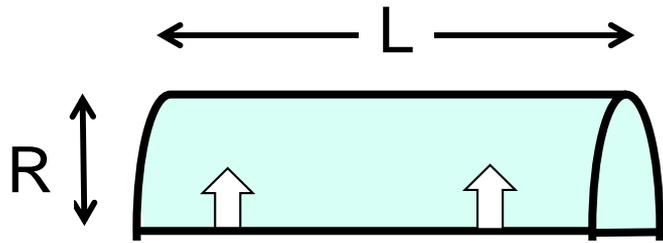
従って毛管圧力は

$$\Delta p = -\sigma \frac{d^2h}{dx^2} = \frac{\sigma R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}}$$

円柱中央での圧力は $x = 0$ を代入して

$$\Delta p = \frac{\sigma R^2}{R^3} = \frac{\sigma}{R}$$

半円柱に働く毛管圧(別解)



半径Rの液柱

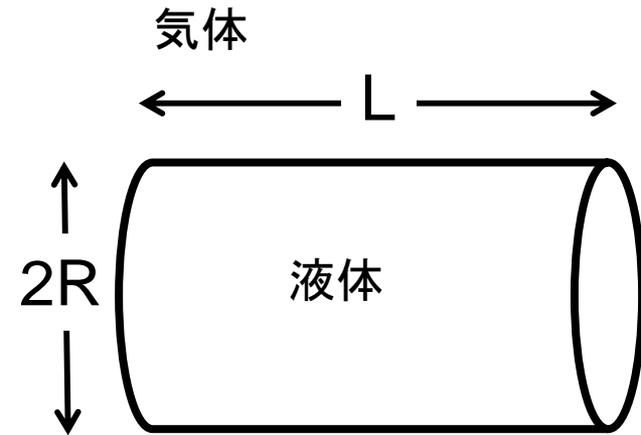
液体の半円柱の底面(面積 $2LR$)
の上下における圧力差を Δp とする

定常状態と仮定すると
液滴底面に働く力の釣り合いより

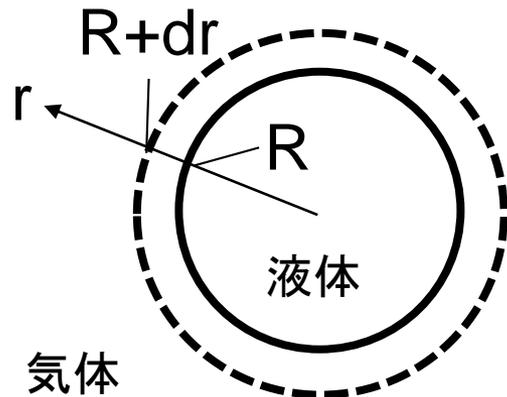
$$\sigma \times 2L = \Delta p \times 2LR$$

$$\therefore \Delta p = \frac{\sigma}{R}$$

円柱に働く毛管圧(別解)



側面図



断面図

気体中にある半径 R 、長さ L の液相円柱を考える。
気相と液相の界面には表面張力 σ が作用している。

円柱の半径が dr だけ広がる時、円柱表面積は
 $dA = 2\pi(R+dr)L - 2\pi RL = 2\pi Ldr$

だけ増加するので、必要な仕事は
 $dW = \sigma dA = 2\pi\sigma Ldr$

この仕事をするために作用する力は
 $dW = Fdr$

$$\therefore F = 2\pi\sigma L$$

円柱内の液相の圧力を p_{in} 、円柱外の気体の圧力を p_{out}

とすると、円柱外から作用する力は円柱表面積 $2\pi RL$ と

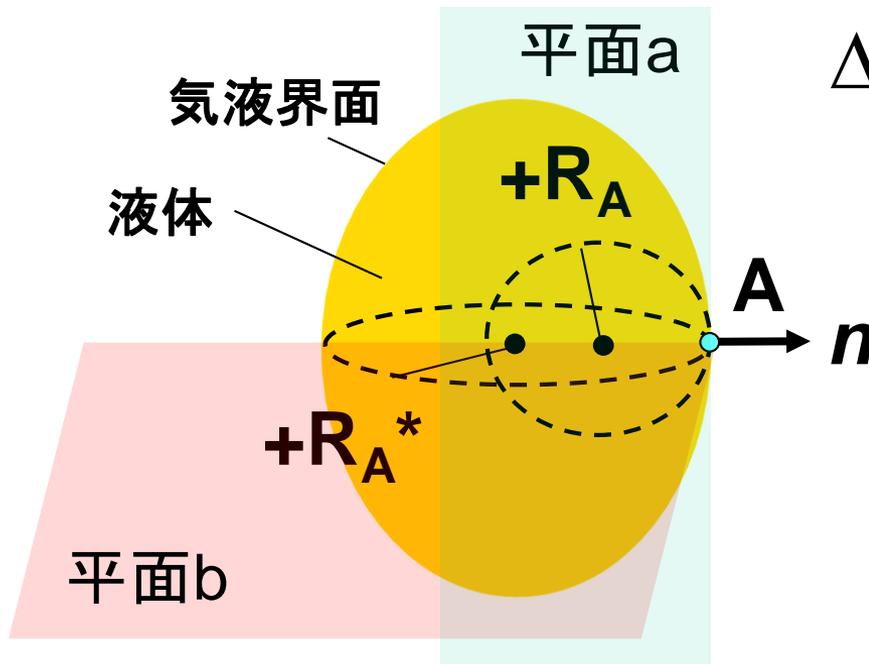
p_{out} の積と F の和であるので、平衡状態での力の釣り合いより
 $2\pi RLp_{out} + 2\pi\sigma L = 2\pi RLp_{in}$

$$\therefore p_{in} - p_{out} = \frac{\sigma}{R}$$

3つのルール

- I. 界面上の任意の点Aについて、点Aを通る法線ベクトル n をとる。ベクトル n を含み且つ互いに直交する2つの平面上に、界面に沿った円を描く
- II. 円の中心が液体内部にあるときは曲率半径の符号を正に、外部にあるときは負に取る
- III. 液体内外の圧力差は正の物性定数 σ を用いて次式で表される

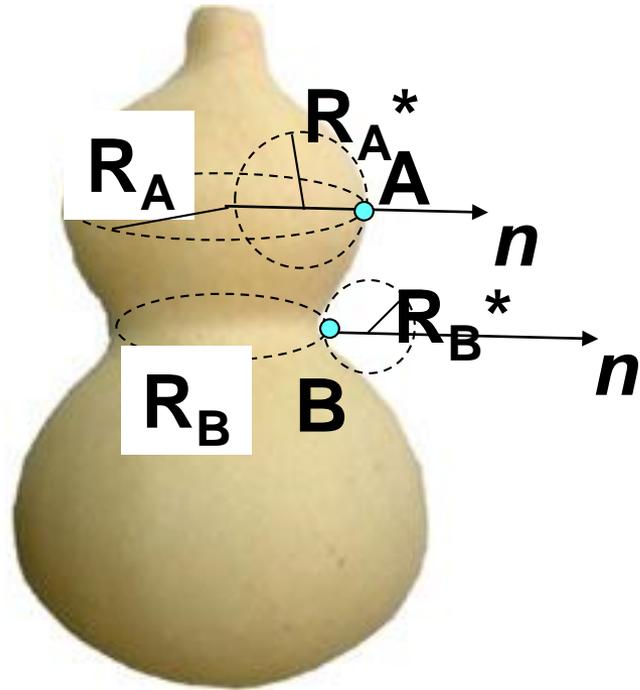
(ラプラスの定理, Laplace 1805)



$$\Delta p = \sigma \left(+\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_A^*} \right)$$

ただし符号は左図の場合

くびれを持つ液柱



www.yumegazai.com

$$\boxed{\text{点A}} \quad \Delta p_A = \sigma \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_A^*} \right)$$

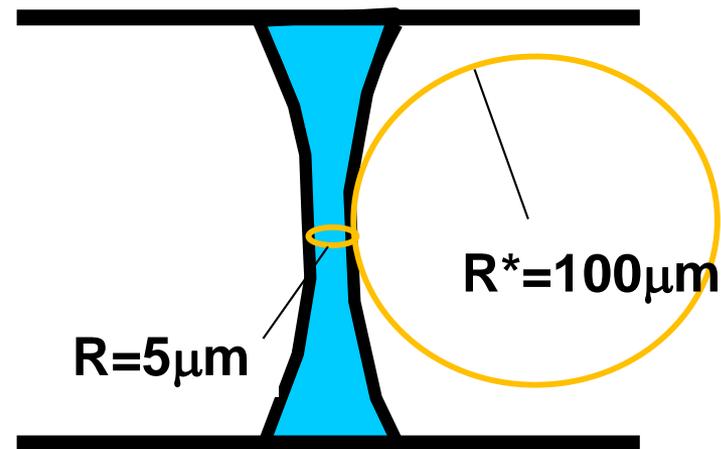
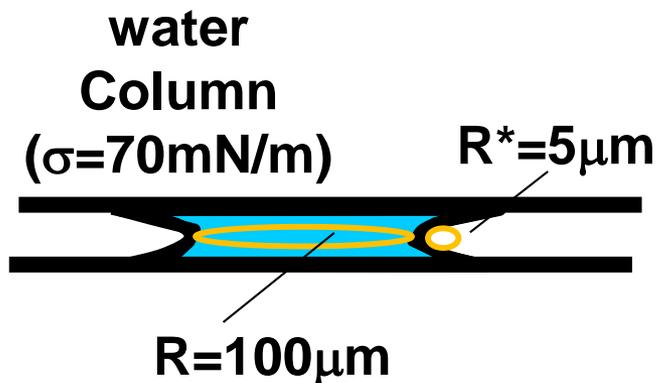
$$\boxed{\text{点B}} \quad \Delta p_B = \sigma \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_B^*} \right)$$

Q1. $\Delta p_A < \Delta p_B$ が成り立つ場合
液柱はどのように変形するか？

- a. 球に近づく b. 分裂する c. 円柱に近づく

Q2. 液体外の圧力が一定の場合
 $\Delta p_A < \Delta p_B$ となる条件は何か？

2枚の平板に挟まれた液柱



$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^*} \right)$$

$$= (70 \times 10^{-3}) \left(\frac{1}{100 \times 10^{-6}} - \frac{1}{5 \times 10^{-6}} \right)$$

$$= -13\text{kPa}$$

負圧（平板を吸い寄せせる力）

$$\Delta p = 13\text{kPa}$$

正圧（分裂の駆動力）

(注) 合一も分裂も生じない安定な液柱形状が存在¹³

球に働く表面張力

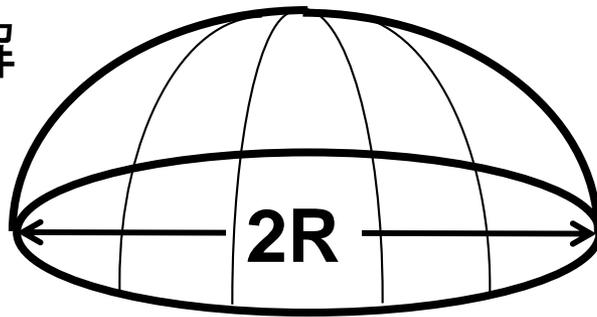
一般的な3次元物体であれば、曲率半径の異なる R , R^* を用いて

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} \right)$$

(例) 半径 R の球

$$R = R^* \text{ を代入すれば } \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

(例) 別解



液滴底面(面積 πR^2)の上下
における圧力差を Δp とする

定常状態と仮定すると
液滴底面に働く力の釣り合いより

$$\sigma \times 2\pi R = \Delta p \times \pi R^2$$

$$\therefore \Delta p = \frac{2\sigma}{R}$$

Consider a liquid column with radius R. The surface position of the column is expressed as

$h(=y) = \sqrt{R^2 - x^2}$, where the origin of the x coordinate is at the center of the column.

Q1. Derive Eq. (1).

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Q2. Derive the equation (2) for capillary pressure at x=0 in the liquid column. The liquid pressure relative to the atmospheric pressure is given by $p = -\sigma d^2h/dx^2$ where σ denotes the surface tension of the liquid.

$$p = \frac{\sigma}{R} \quad (2)$$

Q3. Two liquid columns of radius R merge when they contact. Explain the physical reason why the columns merge to become one bigger column based on the capillary pressure.